Patrones de errores de estudiantes chilenos en resolución de problemas matemáticos

Chilean students' error patterns for solving mathematical problems

Gamal Cerda, César Flores y Carlos Pérez

Universidad de Concepción (Chile)

Resumen

Los errores frecuentes de estudiantes en tareas de resolución de problemas pueden otorgar conocimiento útil para la mejor comprensión de su manera de pensar, así como también para, posteriormente, reforzar su capacidad de resolución de problemas y, consecuentemente, el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Este estudio examinó una muestra de 263 estudiantes chilenos destacados de 3 niveles escolares distintos. Los estudiantes de cada nivel escolar produjeron una resolución escrita de un problema lógico-matemático diferente sobre números y álgebra. El análisis de errores mostró la aparición involuntaria de argumentos falaces típicos en la muestra de estudiantes. Además, se descubrieron algunos patrones de errores que parecen depender fuertemente del contenido matemático considerado y que muestran cierta independencia de las otras variables.

Palabras clave: álgebra, análisis de errores, argumentos falaces, causas del error, números, resolución de problemas.

Abstract

Frequent students' error patterns in problem solving tasks may give useful knowledge to better understand their way of thinking. This knowledge is also useful to strengthen students' problem solving skills and, consequently, to improve the teaching/learning process of school mathematics. This study examined a population of 263 high-performing Chilean students from 3 different school levels. The students had to produce a written solution of a different logical-mathematical problem concerning numbers and algebra. Error analysis indicated that several typical fallacious arguments involuntarily arose on students' sample, as well as some error patterns that seemed to strongly depend on the particular mathematical content of the task, showing some independence of the other variables involved.

Keywords: algebra, error analysis, error causes, fallacious arguments, numbers, problem solving.

El desarrollo del análisis de los errores en educación matemática acumula ya una buena cantidad de años (Radatz, 1979), observandose en este periodo cómo la manera en que se concibe el error ha madurado con el tiempo. Desde enfatizar el aspecto negativo del error, con el objetivo de erradicarlo o disminuir lo más posible su nefasta aparición, se ha pasado a concebirlo como una fase natural e inevitable en el proceso de construcción del conocimiento (Borasi, 1987). En efecto, los errores en matemáticas no son simplemente el desafortunado resultado de un descuido o distracción, sino que son la consecuencia de procesos específicos cuya naturaleza debe ser puesta en relieve (Ginsburg, 1977). En matemática predominan los errores sistemáticos, con respecto a los errores por azar u ocasionales, y por este motivo, ellos permiten visualizar los procesos mentales que han llevado al estudiante a un comprensión equivocada (Rico, 1995).

Hoy en día es ampliamente reconocido que del análisis de los errores cometidos por los alumnos, si se analizan detalladamente, pueden obtenerse sugerencias útiles para el diseño de estrategias que permitan mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Fiori y Zuccherini, 2005). Sin embargo, se ha observado que resulta bastante complejo lograr una clasificación clara de las eventuales causas de un error específico. Un mismo problema matemático puede llevar a errores con diferentes causas, y el mismo error puede aparecer en distintos procesos de resolución de problemas (Radatz, 1979). Así, el identificar y analizar errores paradigmáticos, que muestren una causación simple, resulta especialmente relevante.

Por otro lado, la resolución de problemas ha sido y es un elemento básico del quehacer matemático en general y de la matemática escolar en particular (Stanick y Kilpatrick, 1988) y una línea de investigación natural es el intento de comprender mejor el pensamiento y las argumentaciones dadas por los estudiantes cuando se enfrentan a problemas matemáticos, con el fin de mejorar su capacidad de resolución de problemas y, en consecuencia, su desempeño en matemáticas.

La presente investigación se enfoca analizar los errores cometidos por tres grupos de estudiantes destacados del sistema escolar chileno al enfrentar tres problemas no rutinarios de matemáticas, uno para cada grupo. Se trata de comparar estos grupos y buscar patrones comunes de errores, cuyo análisis puede proveer útiles perspectivas sobre líneas argumentativas erradas que aparecen de manera reiterada y que muestran cierta independencia respecto de diferentes variables como aspectos socio-culturales, género, métodos de enseñanza e incluso edad de los estudiantes. Se plantea un problema distinto a cada grupo, con excepción de un problema común que se plantea a dos grupos diferentes. Se pretende, así, analizar la persistencia de los tipos de error incluyendo, además de las variabes ya mencionadas, la variable disciplinaria específica inherente a cada problema.

Los problemas seleccionados corresponden dentro del marco curricular chileno, a los ejes matemáticos de "Números" y "Álgebra", siendo elegidos considerando un nivel progresivo de conocimiento disciplinar: un problema planteado en un nivel básico de conteo, otro de nivel medio en operatoria aritmética y un problema de orden superior en álgebra. Estos problemas fueron seleccionados dentro del conjunto de problemas que los estudiantes enfrentaron una actividad denominada "Campeonato de Matemática", en donde se les exige que sus respuestas tengan una adecuada justificacióndel razonamiento o argumentos que la sustentan. Además, las pruebas aplicadas consideran un tiempo adecuado para su desarrollo (3 preguntas con tiempo máximo de dos horas) para evitar el riesgo de cometer errores por premura, inatención o poca comprensión del enunciado, pues su solución no se reduce a un dato final u operatoria sin fundamento, y la revisión del problema considera además los esfuerzos e intentos por abordar el problema.

Cada problema aplicado fue construido cautelando su pertinencia, en el sentido que los contenidos matemáticos implicados están en concordancia con los aprendizajes esperados del respectivo nivel educativo. Además, los problemas abren la posibilidad de poner en práctica por parte de los alumnos diversas estrategias de razonamiento para encontrar el patrón o lógica subyacente, desde las más elaboradas (abstracción, generalización), hasta las más elementales (razonamiento exhaustivo de casos, ensayo y error), en donde estas últimas requieren generalmente de una resolución más extensa, y que involucra un trabajo laborioso, ordenado y perseverante. Al ser un tipo de problema planteado en un contexto extra-curricular, se evita que los estudiantes enfrenten su resolución mediante la llamada "transferencia analógica" (Gómez, Solaz, y Sanjosé, 2012), en donde el profesor resuelve un conjunto de problemas basados en algún procedimiento, ley o teorema, y a continuación propone "problemas análogos" a aquellos desarrollados, para que los estudiantes intenten resolverlos.

Por otro lado, si bien la secuencia curricular jerarquizada es conteo-aritmética-algebra, con la intención de realizar un estudio comparado entre dos niveles educativos, se optó por formular un problema de conteo con un nivel de dificultad de resolución superior al de aritmética, de manera que se presentara como desafiante para ambos niveles. Es decir, que desde el punto de vista de los investigadores que eligieron los problemas, la jerarquía de acuerdo a su dificultad de resolución viene a ser aritmética, conteo y álgebra.

Como objetivos de la investigación se desea analizar la proporción y tipología de las respuestas erróneas dentro de una muestra de respuestas elegidas al azar de un conjunto de estudiantes que participaron de la actividad “Campeonato de Matemática” organizado por la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción. Específicamente, se plantea examinar si la naturaleza y proporción de los errores se diferencia en función del tipo de problema (conteo, aritmético, algebraico) y también de variables como el género de los estudiantes o su nivel educativo. Finalmente, se persigue relevar y analizar cualitativamente algunos tipos de errores que por su recurrencia o particularidad constituyan la base para generar estudios de caso destinados a ser incoporados como mecanismos de reflexión en procesos de formación inicial o de profesores de matemáticas en ejercicio.

Se postula la hipótesis que la naturaleza común de los dos problemas del eje matemático de Números (el de conteo y el de aritmética) redundará en una tipología similar de errores en el examen de las respuestas incorrectas, fundamentalmente errores de tipo lógico y técnico.Del mismo modo, se postula que los errores de los estudiantes que no logran resolver correctamente el problema de conteo son similares independientemente del género y del nivel educativo que posee (segundo ciclo básico y enseñanza media en el sistema chileno, equivalentes a la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en el sistema español). Finalmente, se postula a que frente a la dificultad inherente del problema de nivel superior (algebra), los errores predominantes sean del tipo uso incorrecto de resultados y/o definiciones y/o errores al operar algebraicamente por sobre los de tipo lógico y técnico.

Método

La investigación es de tipo mixto, pues contempla por una parte, un diseño descriptivo correlacional y, además, un análisis cualitativo, de carácter descriptivo con soporte gráfico que da cuenta de algunos casos singulares de errores que propicien el estudio de casos, al considerarlos como estrategias correctas para enfrentar el problema, pero que por alguna razón, en su desarrollo o forma de implementarla dan lugar a errores de razonamiento.

Participantes

La población objeto de estudio está constituida por el conjunto de registros de respuesta en formato escrito de las pruebas de las diversas jornadas del Campeonato de Matemática que organiza anualmente la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción. Durante los últimos años, la cantidad de alumnos participantes ha sido cercana a los 1300, distribuidos entre los cursos de 5º año básico a cuarto año medio del sistema educativo Chileno (niveles equivalentes a 5º año de Educación Primaria hasta 2º año de Bachillerato en España), realizándose cinco fechas por año, de acuerdo a las cuales se definen los puntajes finales y la premiación. Para garantizar un trabajo individual, en cada aula de examinación se contemplaba la permanencia de uno o dos monitores(as), que son estudiantes Universitarios de cursos superiores.

Los estudiantes fueron elegidos por un muestreo de tipo probabilístico aleatorio estratificado, con un número equilibrado de hombres y mujeres, quedando constituida de la siguiente forma.

Tabla 1. Distribución de la muestra de respuestas analizadas en función del problema, género y nivel educativo de los estudiantes

	Problema					
	Aritmético y razonamiento		Conteo		Álgebra	
Curso	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer	Hombre	Mujer
Sexto de Educación Primaria	52	48	-	-	-	-
Segundo ESO	-	-	42	31	-	-
Primero de Bachillerato	-	-	51	42	51	42

Material, procedimiento y análisis estadísticos

Se procedió a examinar y tabular las respuestas de tres problemas, seleccionados del conjunto de preguntas elaboradas para el Campeonato de Matemática, cuyos enunciados son los siguientes:

Problema aritmético, para estudiantes de sexto año de primaria: En un torneo interescolar de tenis se inscriben 64 jugadores. Si en cada ronda se forman parejas de rivales que deben jugar un partido, quedando eliminado el perdedor, y pasando el ganador a la ronda. ¿Cuántos partidos se jugarán en total en el torneo?.

Problema de Conteo, para estudiantes de Segundo ESO y Primero de Bachillerato: Para escribir los números del 1 al 10 se usan dos “unos” (el del 1 y el del 10). ¿Cuántos unos se necesitan para escribir los números del 1 al 1000?

Problema de álgebra, para estudiantes de Primero de Bachillerato: ¿Cuál es el menor valor que puede tomar la expresión x2 + 8x? En la expresión anterior, x puede ser entero positivo o negativo.

Los tres problemas permiten enfrentarlos tanto mediante estrategias de resolución exploratorias como argumentos más analíticos.

Así por ejemplo, para el primer problema, la solución podría encontrarse al percatarse que si cada jugador puede perder una sola vez (mecanismo de eliminación), para eliminar a todos menos uno (el ganador), debieran haberse jugado 63 partidas. También podría haberse seguido un razonamiento exploratorio, deduciendo la cantidad de jugadores "sobrevivientes" por cada ronda y luego sumar la cantidad de partidas: ronda 1 (32), ronda 2 (16), ronda 3 (8), ronda 4 (4), ronda 5 (2) y ronda 6 (última ronda)(1), que totaliza 32+16+8+4+2+1=63 partidas. El razonamiento exploratorio, que podría ser asociado a una extrategia de conteo, suele ser acompañado de tablas o diagramas para organizar la información. Este problema era el más sencillo de los tres elegidos.

El segundo problema, de conteo, presentaba mayor dificultad, ya que no tenía un referente de una situación concreta como lo tenía el problema anterior, sumado a la gran cantidad de casos posibles al optar por la extrategia exploratoria. La solución correcta es indicar un total de 301 "unos". Una manera intuitiva para enfrentarlo es aquella de realizar el conteo por grupos de números: del 1 al 10, del 11 al 100, del 101 al 1000, y desde el recuento realizado inferir ciertos patrones de cuantificación que pudieran permitir realizar una suma total.

En el tercer problema, de álgebra, está situado en un dominio cognitivo superior, y surgen algunos elementos diferentes a los anteriores, siendo la principal dificultad el tener la claridad conceptual de la diferencia entre los conceptos matemáticos "expresión algebraica" con "ecuación". Una opción analítica para resolver el problema podría ser aquella de transformar la expresión en una equivalente, por ejemplo, notando que x2 + 8x=x2 + 8x +16 - 16 =(x+4)2 -16. Luego, al ser esta última una expresión cuadrática, la cual será siempre positiva, el menor admisible es para el caso x=-4, obteniéndose como resultado un valor (0)2 -16=-16, que corresponde al valor mínimo. Otra opción para enfrentarlo es asociar la expresión algebraica con una parábola, y recordar o inferir algunas de sus propiedades gráficas. Por ejemplo, que el valor mínimo se encuentra al evaluar el promedio de las dos soluciones a la ecuación cuadrática.

Para analizar el tipo de errores se utilizó la clasificación propuesta por Saucedo (2007), la que asume que éstos ocurren cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, entre otras) que no es válida desde el punto de vista de la disciplina o institucionlidad matemática escolar.Estos autores presentaron una clasificación tomando como base la realizada por Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) que tiene las siguientes categorías:

Tipo de Error	Descripción
A	Datos mal utilizados. Lectura incorrecta del problema, no se logra entender el problema.
B	Interpretación incorrecta del lenguaje matemático. Errores debido a confusiones de símbolos y el significado que tenían. Un ejemplo es: $X^3 + X = X^4$
C	Empleo incorrecto de resultados y/o definiciones. Estos son errores debidos a que se recuerda mal cómo aplicar tal resultado, fórmula, definiciones, etc. Un ejemplo $(X^3)^2=X^{3+2}=X^5$
D	Errores al operar algebraicamente. Errores al realizar operaciones del estilo 6 x 7 = 44
E	No verificación de resultados. Se responde otra cosa, olvidando la pregunta inicial.
F	Errores lógicos. Argumentos falaces. Adopción de patrones falsos. Generalizaciones apresuradas.
G	Errores técnicos. Errores al copiar un dato. Errores por distracción. En este tipo se incluyen los “errores al contar”.

Posteriormente, los investigadores procedieron a la revisión y tabulación de las respuestas a las tres preguntas seleccionadas para los grupos señalados con anterioridad, consignando las respuestas correctas y aquellas sin respuesta. En el caso de las incorrectas, se clasificó el tipo de error según la clasificación de la Tabla 2, todo ello mediante clasificaciones independientes y criterios de concordancia de los jueces evaluadores. Finalmente, la información se tabuló en tablas de contingencia, que permitieron aceptar o refutar las hipótesis formuladas previamente, mediante la prueba Chi cuadrado. Para los análisis estadísticos, se utilizó el software SPSS en su versión 19.

Finalmente, se registraron evidencias gráficas (fotografías digitales) de las hojas de respuesta, para ilustrar adecuadamente algunos errores más representativos y/o de interés didáctico para propiciar reflexión pedagógica en torno a su ocurrencia, y para diseñar actividades en el aula para fomentar su superación.

En cuanto al apego a las nomas éticas para la investigación APA, es pertinente mencionar que el Campeonato Escolar de Matemática es de carácter abierto y voluntario para los establecimientos educacionales que participen, y se rige por bases administrativas de conocimiento público disponibles antes del proceso de inscripción. En ellas se informa en particular a todos los eventuales participantes el hecho que las pruebas realizadas por los estudiantes pueden ser utilizadas para fines investigativos en el área, garantizando la adecuada confidencialidad del uso de la información.

Resultados

En un primer nivel de análisis se observa que los niveles de respuestas correctas dados por los estudiantes de los grupos examinados son similares para el problema de tipo aritmético y el de tipo algebraico (en torno al 41%). Sin embargo, respecto del problema de conteo, problema común para estudiantes de Segundo de la ESO y Primero de Bachillerato, esta proporción cae en torno al 20% aproximadamente del total de las respuestas analizadas, lo que lo releva como el problema más difícil de resolver para los estudiantes examinados, especialmente para el grupo de estudiantes de Segundo año de la ESO, de los cuales sólo un poco menos que el 7% lo resuelve correctamente, respecto del grupo de estudiantes de Primero de Bachillerato, quienes lo resuelven correctamente en torno al 30%.

Al analizar la proporción de respuestas correctas de los estudiantes del género masculino, se observa que ésta es superior a las del grupo femenino, esto sin considerar el tipo de problema (36,1% respecto del 25,3%, respectivamente). Si se considera el tipo de problema, se tiene que en el problema algebraico la proporción de respuestas correctas del grupo masculino respecto del femenino es 48.1% versus 33,3%; mientras que en el problema algebraico la proporción es de un 44,9% versus el 36,6%. En el problema de conteo la proporción favorece nuevamente al grupo masculino, con un 24,7%, respecto del 13,7% de respuestas correctas en el grupo femenino. En este último caso, si se considera además el nivel educativo, se tiene que en el caso del grupo femenino de Segundo de ESO, sólo una de las 31 alumnas resuelve correctamente el problema, en cambio, en el grupo masculino, son 9 de los 42 estudiantes quienes lo resuelven correctamente. En Primero de Bachillerato, sólo 4 de las 42 alumnas lo resuelven correctamente, en cambio en el grupo masculino, 19 de los 51 estudiantes lo resuelven correctamente.

Análisis de los errores

Al seleccionar sólo las respuestas de aquellos estudiantes que respondieron incorrectamente los problemas se observa que la mayoría de los errores de los estudiantes se concentran en los errores de tipo técnico (38,8%), seguidos de los errores de tipo lógico (30%), que corresponden a la categoría F y G en la tabla de clasificación.

Si se compara el tipo de error en función del género de los estudiantes, se observa de la Tabla 3, que los errores de tipo técnico son proporcionalmente más frecuentes para el grupo masculino, mientras que los errores de tipo lógico son más frecuentes proporcionalmente en el grupo femenino. Sin embargo, al analizar el conjunto de los errores según el criterio de clasificación indicado en la Tabla 3, se constata que no existen diferencias significativas en las proporciones y naturaleza de los errores en función del género de los estudiantes ($\chi 2(7, N=237)= 9.700$, $p=.206$).

Tabla 3. Distribución de frecuencia y tipos de errores cometidos por los estudiantes al resolver los tres tipos de problemas en función del género de éstos

	Género					
	Femenino		Masculino			
Tipo de Error	n	Porcentaje	N	Porcentaje	Total	Porcentaje
Datos mal utilizados	6	5.1%	7	5.9%	13	5.5%
Interpretación Incorrecta del Lenguaje matemático	0	0%	2	1.7%	2	0.8%
Empleo incorrecto de resultados y/o definiciones	2	1.7%	5	4.2%	7	3.0%
Errores al operar algebraicamente	5	4.2%	6	5.0%	11	4.6%
No verificación de resultados	7	5.9%	4	3.4%	11	4.6%
Errores lógicos	43	36.4%	28	23.5%	71	30.0%
Errores Técnicos	39	33.1%	53	44.5%	92	38.8%
Dos o más tipos de errores	16	13.6%	14	11.8%	30	12.7%
Total	118	100%	119	100%	237	100%

Por otro lado, si se agrupan los errores cometidos por los estudiantes de acuerdo al tipo de problema (conteo, aritmético, algebraico), se tiene lo siguiente:

Se observa que en este caso, para los problemas del eje números (aritmético y conteo), los errores que predominan son los de tipo lógico y técnico, aunque estos se presentan con predominancia en sentido inverso. También se observa que en el caso del problema algebraico, si bien persiste la predominancia del error lógico, emergen otros tipos de error, como el mal uso de datos y el empleo incorrec-

to de resultados (categorías A y C de la tabla de clasificación), sin observarse prácticamente errores de tipo técnico. Con la finalidad de examinar la existencia de diferencias significativas la distribución de los errores, se resumió la clasificación de la forma presentada en la Tabla 5.

Tabla 4. Distribución de frecuencia y tipos de errores cometidos por los estudiantes en función del tipo de problema examinado

	Tipo de Problema					
	Aritmético		Conteo		Algebraico	
Tipo de Error	n	Porcentaje	n	Porcentaje	n	Porcentaje
Datos mal utilizados	0	0%	7	5.4%	6	12.2%
Interpretación Incorrecta del Lenguaje matemático	0	0%	0	0%	2	4.1%
Empleo incorrecto de resultados y/o definiciones	0	0%	0	0%	7	14.3%
Errores al operar algebraicamente	4	6.8%	3	2.3%	4	8.2%
No verificación de resultados	10	16.9%	0	0%	1	2.0%
Errores lógicos	34	57.6%	20	15.5%	17	34.7%
Errores Técnicos	8	13.6%	83	64.3%	1	2.0%
Dos o más tipos de errores	3	5.1%	16	12.4%	11	22.4%

Se observa que en este caso, para los problemas del eje números (aritmético y conteo), los errores que predominan son los de tipo lógico y técnico, aunque estos se presentan con predominancia en sentido inverso. También se observa que en el caso del problema algebraico, si bien persiste la predominancia del error lógico, emergen otros tipos de error, como el mal uso de datos y el empleo incorrecto de resultados (categorías A y C de la tabla de clasificación), sin observarse prácticamente errores de tipo técnico. Con la finalidad de examinar la existencia de diferencias significativas la distribución de los errores, se resumió la clasificación de la forma presentada en la Tabla 5.

A partir de lo anterior, se verificó la existencia de diferencias significativas, en el tipo de error cometido por los estudiantes y el problema examinado($\chi 2(8, N=237) = 130.843$, $p < .000$).

Se realizó, finalmente, un análisis comparativo del tipo de error cometido al resolver el problema de conteo, el cual era un problema común para dos de los grupos de estudiantes: Segundo ESO y Primero de Bachillerato. Si bien se observa que los

estudiantes de nivel educativo superior resuelven correctamente el problema en mayor porcentaje que los estudiantes de nivel secundaria (30.11% versus 6.69% respectivamente), el análisis de las respuestas erróneas, descartando aquellos estudiantes que dejaron en blanco las pruebas (2 en cada grupo) que se consigna en la Tabla 6, deja en evidencia la inexistencia de diferencias significativas respecto del tipo y prevalencia de los errores de ambos grupos($\chi 2(4, N = 237) = 6{,}578$, $p < .160$ n.s.).

Tabla 5. Distribución de frecuencia y tipos de errores cometidos por los estudiantes en función del tipo de problema examinado

	Tipo de Problema					
	Aritmético		Conteo		Algebraico	
Tipo de Error	n	Porcentaje	n	Porcentaje	n	Porcentaje
Errores de tipo conceptual, definiciones o lenguaje matemático	0	0%	7	5.4%	15	30.6%
Errores al operar algebraicamente o no verificar resultados	14	23.7%	3	2.3%	5	10.2%
Errores lógicos	34	57.6%	20	15.5%	17	34.7%
Errores Técnicos	8	13.6%	83	64.3%	1	2.0%
Dos o más tipos de errores	3	5.1%	16	12.4%	11	22.4%

Tabla 5. Distribución de frecuencia y tipos de errores cometidos por los estudiantes al resolver el problema de conteo en función del nivel educativo

	Tipo de Problema				Algebraico	
	Aritmético		Conteo			
Tipo de Error	n	Porcentaje	n	Porcentaje	n	Porcentaje
Errores de tipo conceptual, definiciones o lenguaje matemático	0	0%	7	5.4%	15	30.6%
Errores al operar algebraicamente o no verificar resultados	14	23.7%	3	2.3%	5	10.2%
Errores lógicos	34	57.6%	20	15.5%	17	34.7%
Errores Técnicos	8	13.6%	83	64.3%	1	2.0%
Dos o más tipos de errores	3	5.1%	16	12.4%	11	22.4%

Análisis cualitativo

Dentro del conjunto de respuestas erróneas realizadas por los alumnos, hay algunas que destacan por la información que entrega su análisis visual, en que mediante un análisis del contexto de resolución o abordaje realizado por los alumnos, se pueden diseñar actividades o énfasis que den lugar a nuevos escenarios de aprendizaje con los cuales se pueda trabajar en mejorar la causa del error que se observa.

A modo ilustrativo, presentamos algunos ejemplos para cada uno de los problemas seleccionados.

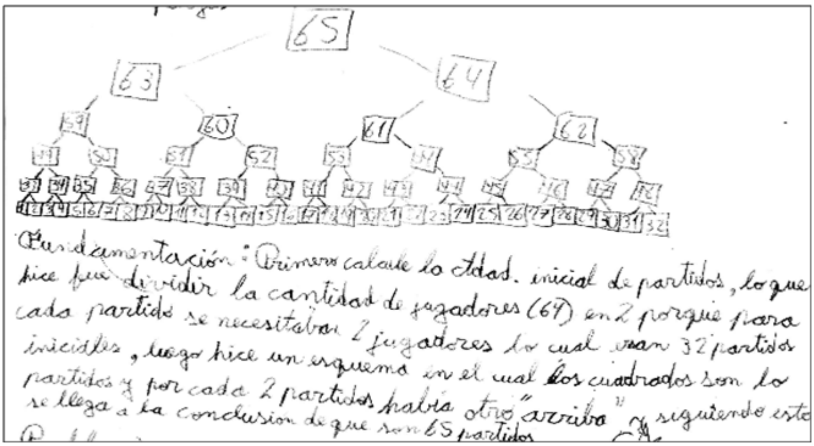
Problema 1

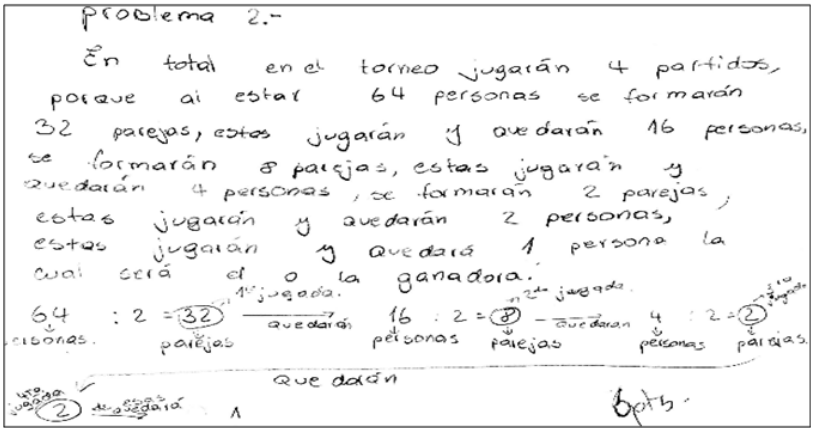
Una estrategia que fue ampliamente utilizada fue realizar una simulación dinámica del total de partidas realizadas mediante un diagrama. Este acercamiento resulta ser algo engorroso por la cantidad de información a considerar, con el consiguiente riesgo asociado a una incorrecta cuantificación de los casos totales, que puede ameritar una respuesta incorrecta.

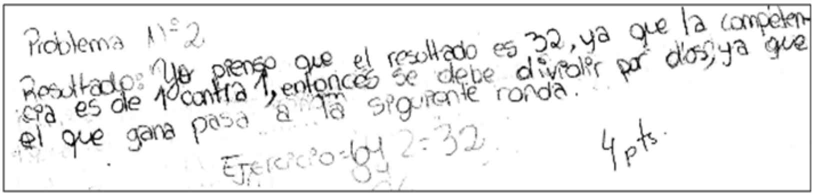
Asimismo, el concepto de "ronda" puede ser un distractor en el proceso de resolución al focalizar la respuesta en este aspecto, y no aquél relacionado con la cantidad de partidos, que era la incógnita a revelar. Esto puede deberse a un problema de comprensión lectora, pero también a un estado de ansiedad matemática relacionada con la necesidad de disponer de un resultado como consecuencia del desarrollo del problema hasta el momento de la inferencia equivocada.

Finalmente, relacionado con lo anterior, también se observa que algunos estudiantes infieren la cantidad de partidos visualizando sólo la dinámica de la primera ronda:

En general, sobre el problema de los partidos de tenis, se observó un alto número de respuestas sin errores, algo medianamente esperable por lo sencillo del problema.




problema 2.-
En total en el torneo jugarán 4 partidos, porque al estar 64 personas se formarán 32 parejas, estas jugarán y quedarán 16 personas, se formarán 8 parejas, estas jugarán y quedarán 4 personas, se formarán 2 parejas, estas jugarán y quedarán 2 personas, estas jugarán y quedará 1 persona la cual será el o la ganadora.
64 personas : 2 = 32 parejas —1ª jugada→ quedarán 16 personas : 2 = 8 parejas —2ª jugada→ quedarán 4 personas : 2 = 2 parejas
quedarán
6pts.


Problema N°2
Resultado: Yo pienso que el resultado es 32, ya que la competencia es de 1 contra 1, entonces se debe dividir por dos, ya que el que gana pasa a la siguiente ronda.
Ejercicio: 64 : 2 = 32.
4 pts.

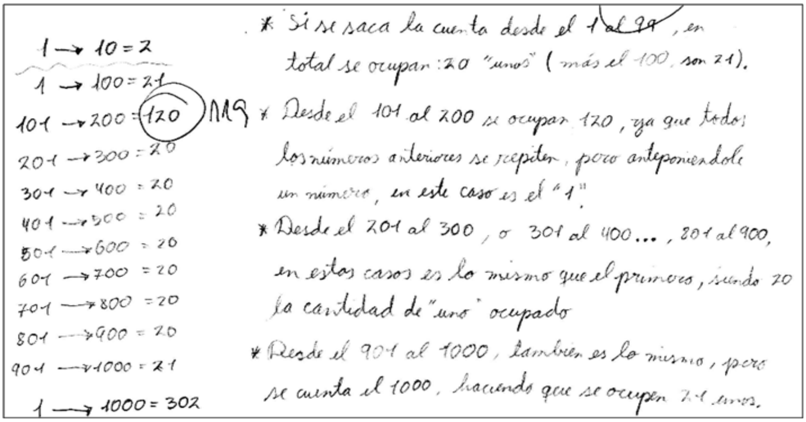
Problema 2

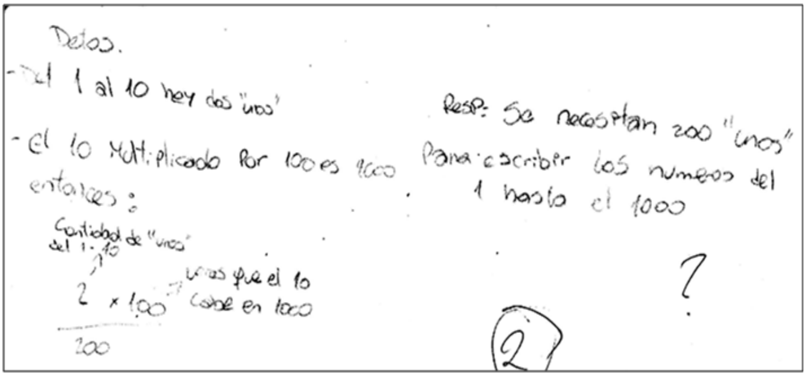
A diferencia de la validez del tratamiento exhaustivo de casos (es decir, construir y analizar todos los casos posibles y luego inferir el resultado), que fue predominante en la resolución del problema 1, en este caso, la mayor dificultad del problema 2 es que precisamente, la cantidad de casos posibles es mucho mayor, aspecto que es rápidamente detectado por los alumnos en la fase exploratoria, procediendo a una especie de clasificación intuitiva por categorías para realizar el recuento de casos. Este abordaje presentó repetidos problemas asociados al recuento de los unos, especialmente en la centena del 100 al 200.

Cuando las categorías son jerárquicas o complementarias, surge la posibilidad de inferir premeditadamente cierto patrón de resultados parciales, sin que el alumno tome la precaución de verificar si el caso corresponde al valor inferido, lo cual, naturalmente, provoca un error. En el siguiente caso, se observa un ejemplo que muestra los parciales del recuento de casos por categoría, que puede llevar fácilmente al alumno a inferir apresuradamente un patrón subyacente.

También relacionado con este aspecto, se puede apreciar un grupo importante de errores que surgen como consecuencia de asociar un patrón incorrecto de acuerdo al siguiente argumento, en que generalmente el segundo cálculo (que es el que presenta el error) es aceptado por la similitud con el primer caso, induciendo una generalización algo apresurada e incorrecta. Además, no hay a priori ninguna razón para considerar que la cantidad de unos, que depende de la escritura y opciones de figurar en el número, presente una proporción fija :

- " Entre el 1 y el 10 hay 2 unos" (afirmación correcta).
- "Entre el 1 al 100 hay 20 unos" (falso, hay 21), de lo que se infiere...
- "Entre el 1 al 1000 hay 200 unos" (afirmación falsa).





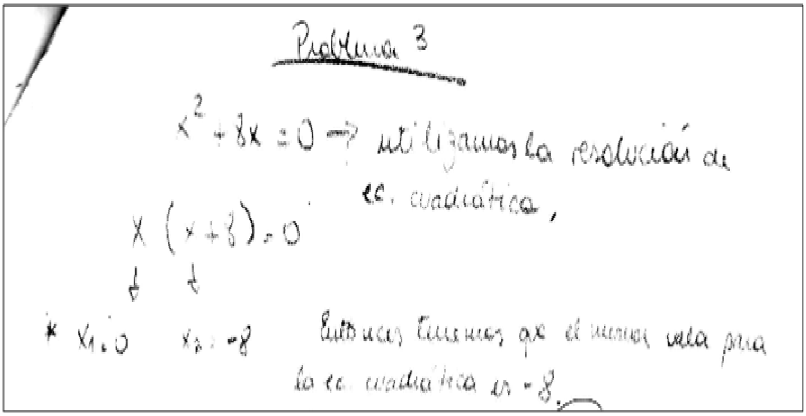
Problema 3

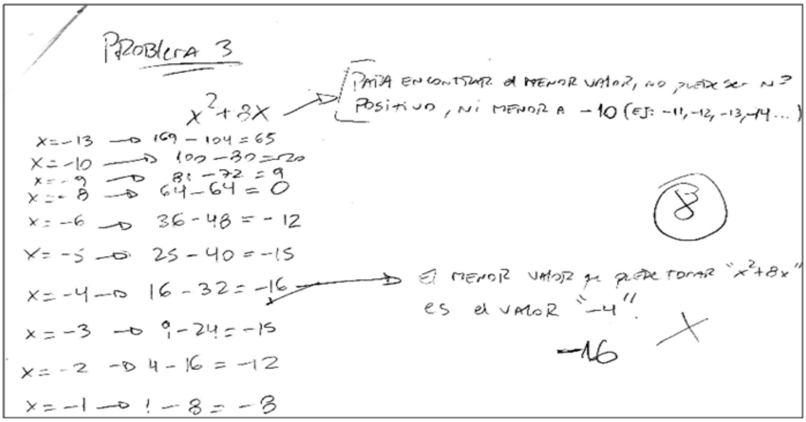
Finalmente, en el problema 3, se observa la evidente confusión entre los conceptos matemáticos de "expresión algebraica" y "ecuación de segundo grado", probablemente debido a que es preferentemente en este escenario de trabajo (ecuaciones de segundo grado) que se contextualiza el uso de expresiones algebraicas en la enseñanza. En la mayoría de los casos analizados, la lógica que justifica la resolución está ausente de manera explícita, evideciándose un aumento notable de errores de tipo A.

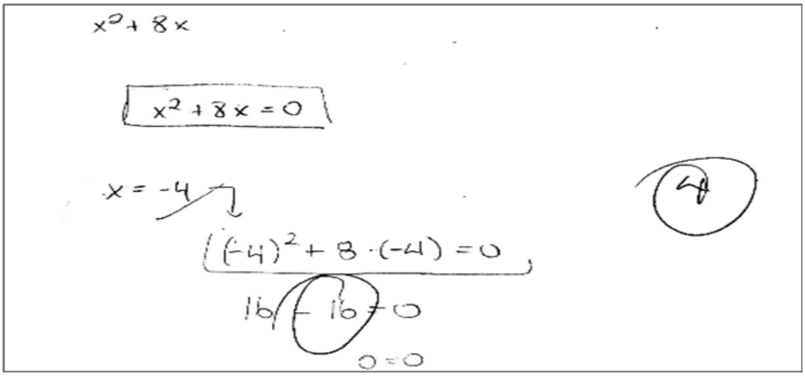
Algunos errores que surgen de esta incorrecta identificación expresión-ecuación tienen que ver con que posteriormente se asocian los resultados de la resolución de la ecuación como aquellos resultados del problema, eligiendo, por ejemplo, la solución de menor valor.

Además, se observan errores relacionados con procesos de búsqueda por tanteo, que generalmente se asocian a un repertorio de valores enteros positivos, obviando el hecho que a priori, el valor de la solución que se busca puede ser un número real cualquiera, o bien, descartando tipos de números mediante inferencias incorrectas.

Finalmente, un aspecto que parece interesante de mencionar, que se observa también en ejercicios de desarrollo algebraico planteados a nivel universitario, es la aparente "obviedad" de haber llegado al resultado o al menos, a la sensación de haber hecho una resolución coherente, cuando como resultado de las operaciones se obtiene la igualdad "0=0", como lo ilustra el siguiente ejemplo.







Discusión

El error, como fuente de información, es un elemento que puede revelar cómo se están produciendo los aprendizajes. Para aprovechar su rol informativo, es fundamental que el profesor o profesora genere un clima de clase en el cual el error no sea visto como una falla que perjudique, sino como una oportunidad para superarse. De esta manera se favorece además la generación de un clima de actitudes favorables hacia las tareas matemáticas, la cual ha demostrado tener un importante efecto en el rendimiento académico en esta área escolar (Cerda y Pérez, 2014; Cerda, Romera, Casas, Ortega, y Pérez, en prensa).

Se puede apreciar la variada información que puede ser recogida al analizar los errores, sobre todo en aquellos problemas que involucren poner en práctica estrategias de razonamiento frente a problemas no tradicionales. El análisis de los errores en este tipo de problemas puede dar indicios de procesos de inducción, deducción, generalización, conceptualización, y otros, que están incorrectamente arraigados en los estudiantes.

Los tres problemas elegidos por el equipo de investigadores permitieron mostrar cómo el tipo de error, de acuerdo a la categorización elegida, puede variar de un problema a otro. Así, en el problema 1, el recuento de errores fue muy bajo, pues el problema era fácilmente entendible dado que planteaba una situación medianamente real, y prácticamente todo el espectro de estrategias a implementar era factible.

En el problema del conteo, en cambio, comienzan a verse algunas diferencias, pues la opción del recuento exhaustivo de casos no es una opción de fácil implementación, debiendo recurrir a la inferencia en base a los resultados parciales de los grupos de recuento que define cada estudiante. La cantidad y tipo de errores aumenta, y resulta algo sorprendente que los errores operacionales de cálculo sean más frecuentes en Primer Año de Bachillerato y Segundo Año de la ESO, lo que podría deberse a que los alumnos del curso inferior tienen aún una ejercitación más cercana con cálculos aritméticos simples al no haber incursionado aún mayormente en los dominios del álgebra.

En el caso del problema 3 (álgebra), surge el natural problema de la dificultad inherente al grado de abstracción que requiere el trabajar con los conceptos algebraicos, observándose por parte de muchos estudiantes la identificación "expresión algebraica" con "ecuación", que podría indicar una deficiencia en la construcción de conocimientos previos. Se esperaba que este problema tuviera una gran cantidad de errores, toda vez que presenta dos aspectos que definen un grado de dificultad importante en relación al uso que el estudiante tiene con el álgebra del colegio: la expresión algebraica y el valor máximo. Este último no es un valor a encontrar por un proceso de resolución (por ejemplo, "búsqueda de raíces", sino un valor que surge al realizar un proceso de análisis con elementos algebraicos).

Frente a lo anterior, el análisis pareciera indicar, por el tipo de error observado, que parte importante de estos errores tienen origen en los procesos de enseñanza-aprendizaje tradicional, en donde los ejemplos por "transferencia analógica" potencian el uso indiscriminado de técnicas sin un fundamento teórico aparente (Gómez, Solaz, y Sanjosé, 2012). También, pudiera inferirse, en el caso del problema del álgebra, que el abordaje de los contenidos algebraicos en la enseñanza está poco articulado.

En todos los problemas, pero principalmente en el de álgebra, se observa una escasa argumentación y muchos errores de lectura, lo que podría estar revelando la escasa importancia que se asigna a los procesos de argumentación y lectura crítica de un problema. Asimismo, en este problema, se ha encontrado un porcentaje importante de errores relativos al incorrecto de propiedades y definiciones algebraicas, los cuales se asociarían a errores de tipo conceptual. Los alumnos hacen un uso inapropiado de propiedades y definiciones cuando tratan de aplicar reglas conocidas a ciertos problemas, de este modo la mayoría de los errores de deben a la aplicación de falsas generalizaciones y sobre todo por la falta de linealidad de algunas operaciones (Saucedo, 2007).

Estos resultados son coincidentes con otras investigaciones donde se destaca la presencia de errores como el empleo incorrecto de propiedades y definiciones algebraicas; interpretación incorrecta del lenguaje; errores al operar algebraicamente o datos mal utilizados (Kok, 2012; Montañez, y Acevedo, 2015). Según los investigadores, los errores y dificultades encontradas por los estudiantes al resolver este tipo de problemas no se debe a una insuficiente ejercitación, sino a una falta de énfasis en los aspectos conceptuales ligados al uso de letras y a la falta de una conexión con las propiedades de las operaciones numéricas. Respecto de lo mismo, García-Suárez, Segovia y Lupiañez (2011), al examinar los procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas por el estudiante, señalan que éste inicialmente plantea el procedimiento a seguir, pero lo desarrolla utilizando un procedimiento propio incorrecto, aparentemente intentando adaptar un conocimiento previamente adquirido del cual le cuesta trabajo desprenderse y pretende aplicarlo en cualquier situación y errores técnicos. En algunos casos, son errores que están relacionados con cuestiones que han quedado sin resolver en la Aritmética. De aquí que sea importante identificarlos para tratar de corregirlos en el ámbito aritmético y que no sean un problema añadido a la hora de introducir el álgebra (Ruano, Socas, y Palarea, 2008).

Es interesante el hecho que no se hayan detectado diferencias significativas en el tipo de error cometido por los estudiantes frente al problema de conteo, por el hecho de pertenecer a distintos niveles educativos. Aun cuando los estudiantes de nivel educativo superior, (bachillerato) presentan un menor número de respuestas erróneas que los del nivel educativo inferior (sexto de primaria), el examen de sus respuestas erróneas deja entrever con claridad que ambos grupos cometen errores similares, fundamentalmente de tipo lógico y técnico.

En general, para los tres tipos de problemas examinados, se puede conjeturar que los alumnos que enfrentan este tipo de problemas “de enunciados” encuentran dificultades para leer y darle sentido a los problemas matemáticos, luchando por comprender el problema, y que los errores exhibidos por los alumnos pueden estar explicados como resultado de una falta de comprensión de vocabulario matemático que es usado para redactar el problema (Sepeng y Sigola 2013)..

Desde el punto de vista didáctico, los hallazgos de la presente investigación pueden contribuir de forma significativa, pues la constatación de la recurrencia de los errores de tipo lógico y técnico, parece revestir el sello de obstáculos epistemológicos que deben ser abordados adecuadamente. Las descripciones cualitativas seleccionadas gráficamente pueden ser utilizadas como soporte para la elaboración de situaciones de enseñanza tipo estudios de caso, que le permitan al alumno, y porque no decirlo al propio docente, tomar conciencia del carácter erróneo de su respuesta y lo inciten a modificar sus concepciones iniciales y/o a renunciar a ellas para construir otras nuevas.

Para ello, la situación didáctica planteada debe provocar conflicto en la mente del alumno, de manera que le permita observar la inconsistencia de sus propios errores, y la búsqueda de las estrategias necesarias para su solución adecuada, sustituyendo con ello, los conceptos falsos por la comprensión conceptual adecuada (Ruano, Socas, y Palarea, 2003). De esta forma, el error puede ser visto como medio motivacional y como punto de partida para exploraciones matemáticas involucradas en la resolución de problemas. Pero es necesario elegir adecuados errores como puntos de partida para la reflexión y exploración, pues cierto tipo de errores son más motivadores que otros (Borasi, 1987) .

El enfoque subyacente por incorporar en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje es mas que resaltar el error es modificar la concepción del error como un fenómeno anormal, como una falta, objeto de sanciones, a las cuales el estudiante buscará responder del modo que sea, incluso, al responder “cualquier cosa” o negándose a responder. Si por el contrario, el estudiante tiene la impresión de que sus respuestas, aún las erróneas, son tomadas en consideración, ellas se vuelven un objeto de trabajo, que reditúa de forma favorable en su predisposición a las tareas en matemática, permitiendo un abordaje centrado en el problema y no en responder a la expectativa del docente. Todo esto es muy importante, sobre todo cuando se ha constatado que en general los profesores evitan en su proceso de instrucción exponer al error a sus estudiantes. Como consecuencia, en su proceso de enseñanza aprendizaje, tienden a formular preguntas a las cuales los estudiantes raramente podrán dar respuestas erróneas (Rach, Ufer, y Heinze, 2013). Al observar las interacciones de aula en las clases de matemática en Chile, se observa que los profesores se focalizan en la presentación mecánica de información y la resolución mecánica de problemas (Araya y Dartnell, 2009; Preiss, 2009; 2011). Del mismo modo, los estudiantes chilenos si bien logran realizar aplicaciones simples, como problemas de operatoria sencilla y rutinarios, los jóvenes chilenos presentan serias dificultades para resolver problemas que exigen razonamientos analíticos y mecanismos de evaluación, y tampoco son capaces de realizar aplicaciones a las situaciones cotidianas, a partir de la Matemática (Eyzaguirre y Le Foulón, 2001; MINEDUC, 2009; 2010a; 2010b)

Limitaciones del estudio. Un mismo error puede aparecer en diferentes procesos de resolución, lo que dificulta una clasificación definitiva y una jerarquía del mismo. Las categorizaciones realizadas son empíricas y por lo tanto debemos tener en cuenta las limitaciones del modelo; sin embargo se pueden fundamentar desde la práctica y ser de utilidad para docentes y autoridades interesados en el diagnóstico, tratamiento y superación de errores. Finalmente, es importante señalar que en la medida en que los ejercicios han sido corregidos por un docente, el registro gráfico de las respuestas puede contener anotaciones de éste.

Referencias

Araya, R.,y Dartnell, P. R. (2009). Saber pedagógico y conocimiento de la disciplina matemática en docentes de educación general básica y media en Chile. Ministerio de Educación, Departamento de Estudios y Desarrollo (Ed.), Selección de investigaciones primer concurso FONIDE: evidencias para políticas públicas en educación (pp. 155-198). Santiago, Chile: Editor.

Borasi, R. (1987). Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. *For the Learning of Mathematics, 7(3)*, 2-8.

Cerda, G., Romera, E., Casas, J., Ortega, R., y Pérez, C. (*en prensa*) Influencia de variables cognitivas y motivacionales en el rendimiento académico en matemáticas en estudiantes chilenos. *Educación XX1*.

Cerda, G., y Pérez, C. (2014). Competencias matemáticas tempranas y actitud hacia las tareas matemáticas. Variables predictoras del rendimiento académico en educación primaria: Resultados preliminares. *International Journal of Developmental and Education Psychology, 1(7),* 469-476.

Eyzaguirre, B., y Le Foulon, C. (2001). La Calidad de la Educación Chilena en Cifras. En *Estudios Públicos*, 84-204.

Fiori, C., y Zuccherini, L. (2005). An experimental research on error patterns in written substraction. *Ed. Studies in Maths. 60,* 323-331.

Ginsburg, H. (1977). *Children's arithmetic: The learning process.* Van Nostrand. New York.

Gómez, C. B., Solaz, J. J., y Sanjosé, V. (2012). Una revisión de los procesos de transferencia para el aprendizaje y enseñanza de las ciencias. *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales 26,* 199-227.

Ministerio De Educación (2009). *Análisis de las competencias en NB1: caracterización de los niveles de complejidad de las tareas matemáticas*: Santiago Chile.

Ministerio de Educación (2010a). *Resultados Nacionales SIMCE.* Unidad de Curriculum y Evaluación, UCE.

Ministerio de Educación (2010b). *Resumen de Resultados PISA 2009 Chile*. Unidad de Curriculum y Evaluación, UCE.

Montañez, E., y Acevedo, G. (2015). Simbolismo Algebraico: Marco Teórico, Problemas de Transferencia, Propuesta Testeada. Conferencia Interamericana de Educación en Matemática. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18(1),* 3-14.

Preiss, D. D. (2009). The Chilean instructional pattern for the teaching of language: A video-survey study based on a national program for the assessment of teaching. *Learning and Individual Differences, 19,* 1-11. doi:10.1016/j.lindif.2008.08.004

Preiss, D., Larraín, A., y Valenzuela, S. (2011). Discurso y Pensamiento en el Aula Matemática Chilena. Discourse and Thought in the Chilean Mathematics Classroom. *Psykhe, 20*Z, 131-146.

Rach, S., Ufer, S, y Heinze, A. (2013). Learning from Errors: Effects of Teachers Training on Students' Attitudes towards and their Individual Use of Errors. *PNA 8(1),* 21-30.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in mathematics education. *J. for research in Math. Ed. 10(3),* 163-172.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), Educación Matemática, 69-96. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ruano, R. M., Socas, M. M., y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA 2(2),* 61-74.

Saucedo, G. (2007). Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad. *Itinerarios Educativos 2(2),* 22-43.

Sepeng, P., y Sigola, S. (2013). Making Sense of Errors Made by Learners in Mathematical Word Problem Solving. *Mediterranean Journal of Social Sciences, 4(13)*, 325-333.

Stanic, G., y Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in mathematics curriculum. En *Research agenda for mathematics education: The teaching and assesinf of mathematical problem solving,* R. Charles y E. A. Silver (Eds.). Reston: NCTM, 1-22.

Gamal Cerda Etchepare. Profesor Asociado de la Facultad de Educación de la Universidad de Concepción, Chile. Investigador asociado al centro de investigación avanzada en Educación (CIAE). Doctor en Psicología Aplicada. Sus líneas de investigación se centran en el área de la cognición y factores asociados al aprendizaje, principalmente en el ámbito de las matemáticas, resolución de problemas, inteligencia lógica y competencias matemáticas tempranas.

César Flores Solar . Profesor Asistente del Departamento de Matemática de la Universidad de Concepción. Investigador asociado al centro de investigación avanzada en Educación (CIAE).Doctor en Matemáticas. Los últimos 5 años los ha dedicado el trabajo en aula con profesores y alumnos del sistema escolar chileno y a un análisis cuidadoso de los problemas pedagógicos que aparecen la enseñanza de la matemática y el lenguaje, centrándose en la acumulación de reflexiones prácticas y evidencias empíricas.

Carlos Pérez Wilson. Doctor en Matemática Aplicada. Es Profesor Asociado en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Concepción. Investigador asociado al centro de investigación avanzada en Educación (CIAE). Ha escrito libros relacionados con el razonamiento matemático y resolución de problemas, y sus actuales líneas de investigación son el desarrollo de actividades de enriquecimiento matemático para preescolar y primaria, y también el desarrollo de modelos complejos predictivos y explicativos para el rendimiento en matemáticas con variables cognitivas y socioeducativas.

Agradecimiento. Proyecto Basal FB0003, Proyecto PIA CONICYT- CIE 05, DIUC 211.164.002-1.0 Universidad de Concepción.

Correspondencia. Gamal Cerda. Facultad de Educación, Universidad de Concepción, Chile. Email: gamal.cerda@udec.cl

Fecha de recepción: 19/6/2015 Fecha de revisión: 22/6/2015 Fecha de aceptación: 24/7/2015